3.4 Rozvinutí kuželových ploch

V následující podkapitole se budeme věnovat rozvíjení rotačních kuželových ploch, křivek na nich ležících a také rozvinutí kosého kužele. Ke každému rozvinutí doplníme též podstavy.

Stejně jako u rotační válcové plochy je i zde rozvinutí samotného pláště rotačního kužele velice jednoduché. Plášť kužele se rozvine do kruhové výseče, jejíž poloměr se rovná délce strany kužele a jejíž oblouk se rovná obvodu základny. Středový úhel výseče je $\omega = \frac{2\pi r}{s}$, kde r je poloměr kružnice podstavy a s je strana kužele. Přejděme tedy rovnou k úloze rozvinutí pláště rotačního kužele seříznutého rovinou.

Příklad 3.4. Sestrojme rozvinutí pláště rotačního kužele seříznutého rovinou σ.

Kužel umístíme tradičně tak, aby jeho podstava ležela v půdorysně a aby rovina řezu σ byla kolmá k nárysně, viz obrázek 3.9.

Víme, že řezem rotační kuželové plochy rovinou, která není vrcholová, ani není kolmá k ose kuželové plochy, je buď elipsa, parabola nebo hyperbola. Zvolme rovinu σ tak, abychom dostali parabolický řez kuželové plochy, tj. vrcholová rovina σ', pro kterou platí $\sigma' \parallel \sigma$, se dotýká kuželové plochy podél povrchové přímky.

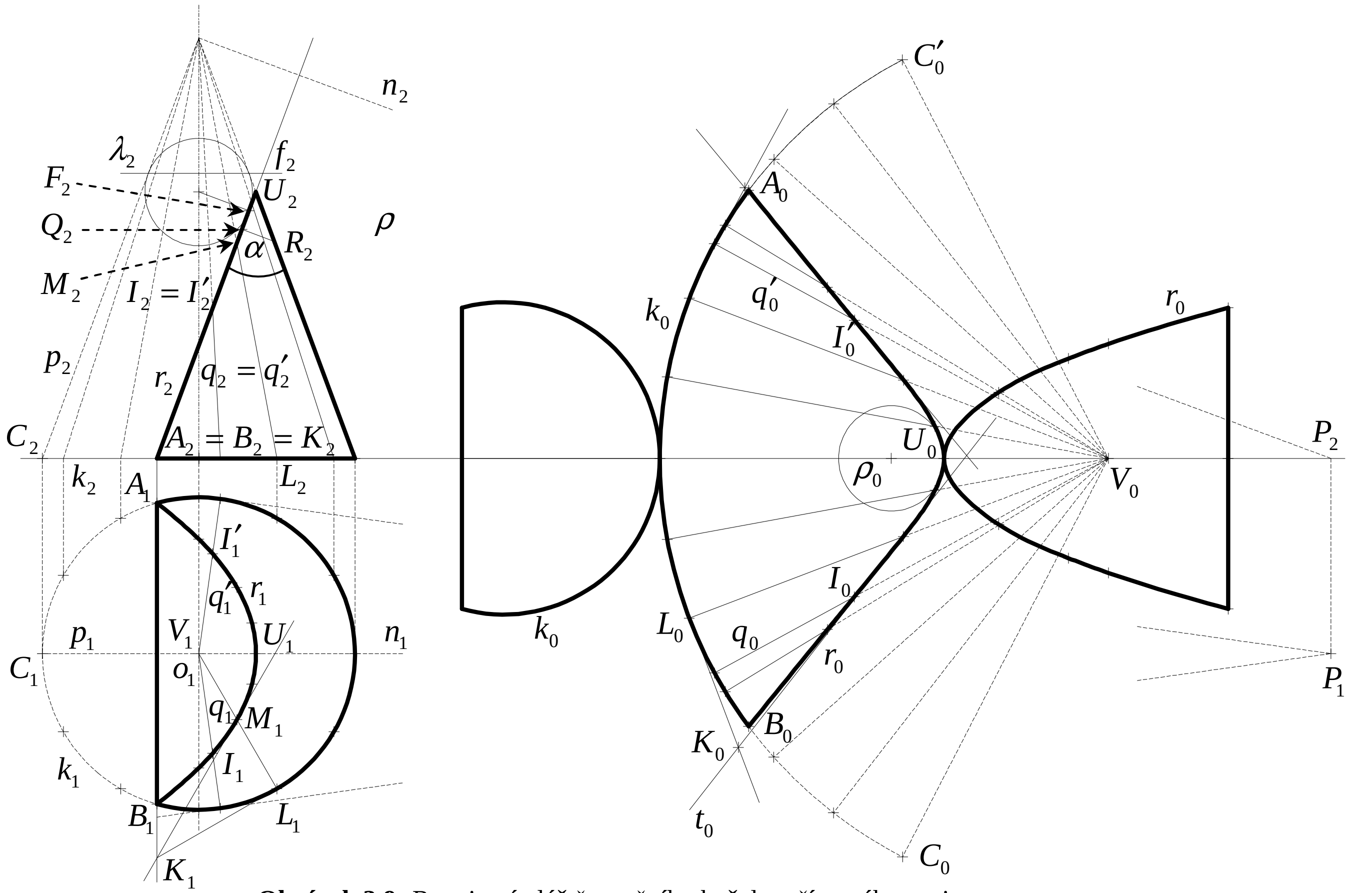
Plášť kužele rozvineme do tečné roviny kuželové plochy, která prochází povrchovou přímkou p. Přitom parabola r se rozvine do křivky r_0, kterou budeme sestrojovat bodově. Z Catalanovy věty plyne, že povrchové přímky kuželové plochy se nám při rozvinutí zobrazí opět na přímky. Vezměme si tedy bod M, který leží na povrchové přímce m a zároveň je to bod paraboly p (tj. je průsečíkem přímky m a roviny σ). Bod M_0 leží na m_0 a platí, že $|V_0M_0| = |VM|$. Skutečnou velikost úsečky VM zjistíme v otočení.

K přesnějšímu sestrojení křivky r_0 využijeme opět tečen. Konstrukce je stejná jako u rozvíjení válce. Užijeme k tomu pravoúhlý ΔKLM, což je patrné z obrázku 3.9.

Sestrojme ještě oskulační kružnici pro bod U_0. Potřebujeme k tomu znát poloměr oskulační kružnice paraboly r v bodě U a úhel φ oskulační roviny paraboly r v bodě U s tečnou rovinou plochy. Parabola r je rovinná křivka, a proto oskulační roviny v každém jejím bodě splývají s rovinou σ. Tečná rovina kužele v bodě U je rovina kolmá k nárysně, která obsahuje povrchovou přímku kužele procházející bodem U. Úhel φ tedy vidíme v nárysе ve skutečné velikosti, $\varphi = \alpha$.

Poloměr ρ oskulační kružnice paraboly r v bodě U odvodíme. Je-li kuželová plocha protťata rovinou v parabole r, její ohnisko F je dotykový bod kulové plochy κ, která je vepsána kuželové ploše a dotýká se roviny řezu (tj. platí tzv. Quételetova-Dandelinova věta). Navíc platí, že pomocná rovina λ dotykové kružnice kulové plochy a kuželové plochy protíná rovinu řezu σ v řídící přímce f paraboly r. Těmito pomocnými konstrukcemi dostáváme tzv. parametr paraboly r, který se rovná vzdálenosti bodů $|F_2 f_2|$. Víme, že poloměr oskulační kružnice ve vrcholu paraboly r je roven parametru, tedy vzdálenost $|U_2Q_2|$ je hledaný poloměr ρ. Z Catalanovy věty už lehce odvodíme, že $\rho_0 = R_2U_2$.

Inflexní body křivky r_0 jsou opět určeny těmi body řezu, v nichž jsou tečné roviny plochy kolmé na oskulační rovinu. Tyto roviny procházejí přímkou n, což je kolmice na rovinu řezu vedená vrcholem V, a dotýkají se plochy podél přímek q a q'. Inflexní body jsou potom obrazy průsečíků $I = q \cap \sigma$ a $I' = q' \cap \sigma$. ■



Obrázek 3.9: Rozvinutí pláště rotačního kužele seříznutého rovinou

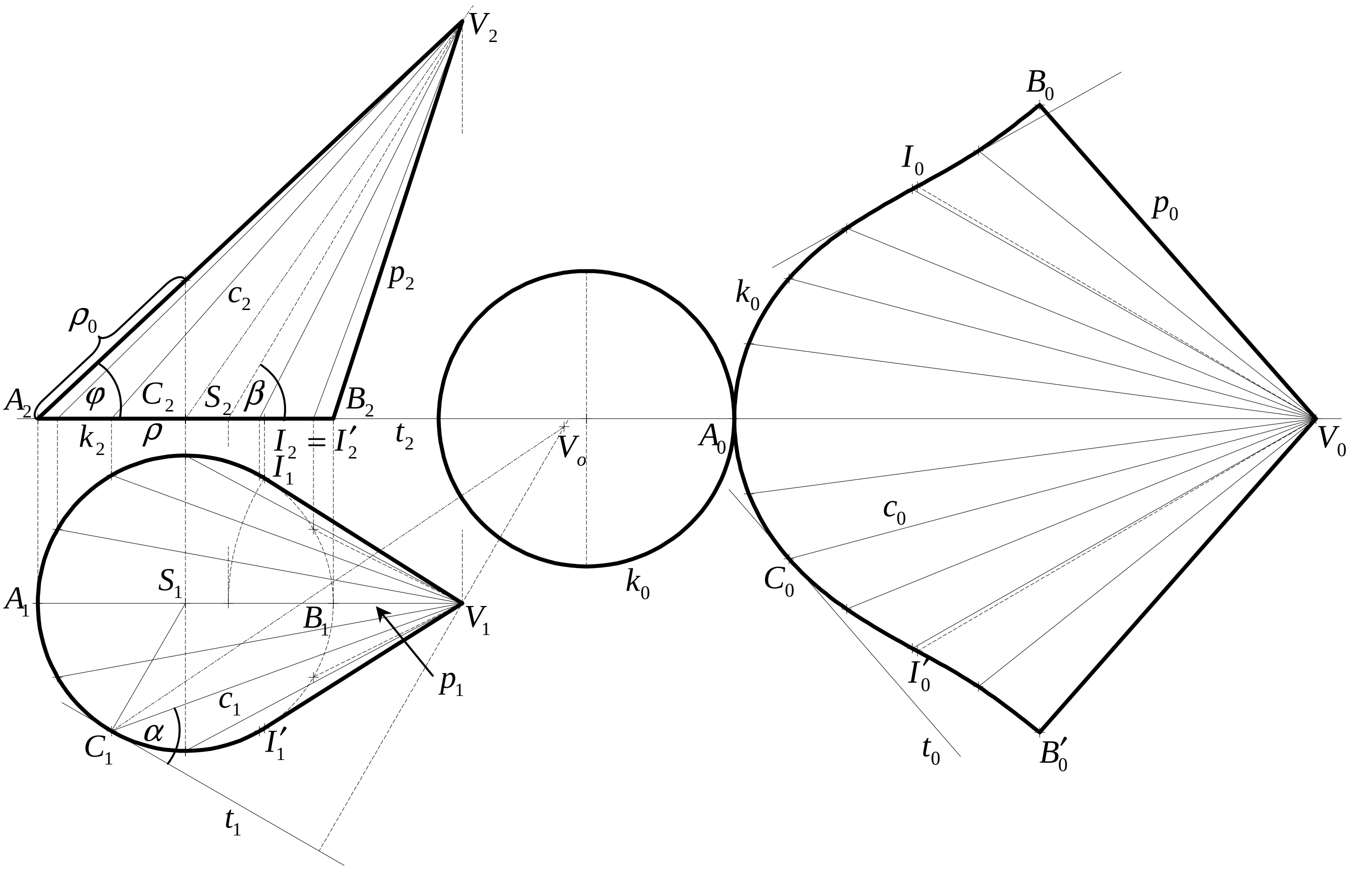
Příklad 3.5. Sestrojme rozvinutí pláště kosého kužele.

Kužel opět umístíme tak, aby jeho podstava ležela v půdorysně, viz obrázek 3.10. Kužel nahradíme vepsaným n-bokým jehlanem, v našem případě $n = 12$. Sestrojíme rozvinutí pláště vepsaného jehlanu a dostaneme tak přibližně síť kosého kužele. Z Catalanovy věty opět plyne, že se povrchové přímky kuželové plochy při rozvinutí zobrazí na přímky. Skutečné velikosti úseček $V1$, $V2$, $V3$, … zjistíme otočením kolem půdorysně promítací přímky vrcholu V do roviny rovnoběžné s nárysnou. Obrazy bodů 1, 2, 3, … rozvinutého pláště jehlanu jsou přibližné polohy bodů křivky k_0, do níž se rozvine kružnice k. Pokud chceme křivku k_0 stanovit přesněji, pak ke konstrukci nepoužijeme vepsaný jehlan, ale užijeme rektifikovaných oblouků 12, 23, 34, … kružnice k.

Ještě zkonstruujme tečnu křivky k_0, například v bodě C_0. To znamená, že najdeme skutečnou velikost úhlu tečny t v bodě C a povrchové přímky c otočením tečné roviny (ct) do půdorysny.

Křivka k je kružnice, tedy v každém bodě má stejnou křivost. Vezměme si bod A. V něm tečná rovina plochy s oskulační rovinou, což je v našem případě půdorysna, svírá úhel φ, který vidíme ve skutečné velikosti v nárysu. Potom poloměr oskulační kružnice křivky k_0 v bodě A_0 už snadno odvodíme v nárysu.

Ještě se můžeme podívat na inflexní body křivky k_0. Hledáme tedy opět body, v nichž jsou tečné roviny plochy kolmé na oskulační rovinu, zde půdorysnu. Na obrázku 3.10 jsou inflexní body označeny I_0, I_0', úhel β je úhel tečen křivky k_0 v bodech I_0 a I_0' s přímkami V_0I_0 a V_0I_0'. ■



Obrázek 3.10: Přibližné rozvinutí pláště kosého kužele