

VÝVOJ VÝPOČETNÍ GEOMETRIE

PETRA SURYNKOVÁ

Abstract: This contribution deals with the major developments in computational geometry and computer graphics. It is focused on constructions of curves and surfaces that were developed for the automotive, aircraft and ship-building industry. Here, computer aided geometric design, a discipline dealing with computational aspects of geometric objects, replaced earlier methods of constructions using descriptive geometry.

1 Úvod

1.1 Rozvoj počítačové grafiky

V šedesátých letech 20. století se začaly vytvářet základy počítačové grafiky. Tehdy se tento obor zabýval zpracováním grafické informace pomocí počítače. Na začátku byly oblasti jeho zkoumání otázky výstupu z počítače, vstup grafické informace do počítače nebo problémy související s vytvářením, manipulací a popisem grafické informace. Z rychle se vyvíjejícího vědního oboru se během sedmdesátých let 20. století začaly odělovat nové podobory a mezi nimi i obor výpočetní geometrie (Computational Geometry). V současné době se s počítačovou grafikou setkáváme doslova na každém kroku a to především díky růstu zobrazovacích možností osobních počítačů.

1.2 Výpočetní geometrie

Pojem výpočetní geometrie v roce 1971 poprvé zavedl *Archibald Robin Forrest*¹. Výpočetní geometrie zahrnovala geometrické teorie – např. teorie zabývající se transformacemi, zobrazením prostoru do roviny a teorie týkající se konstruování křivek a ploch pomocí počítače a grafického výstupu.

V dnešním pojetí je výpočetní geometrie obor zabývající se návrhem a analýzou efektivních algoritmů pro řešení geometrických problémů, určování vlastností a vztahů objektů v rovině a ve vícerozměrném prostoru. Tyto problémy mohou vycházet z aplikací například v počítačové grafice nebo prostorovém modelování. Hlavními oblastmi výpočetní geometrie jsou kombinatorická výpočetní geometrie (Combinatorial Computational Geometry) a numerická výpočetní geometrie, častěji známá pod pojmem geometrické modelování nebo Computer Aided Geometric Design (CAGD). Právě tato oblast výpočetní geometrie bude předmětem našeho pojednání.

2 Křivky a plochy počítačové grafiky

2.1 Vývoj konstruování křivek a ploch

Geometrické modelování má ve skutečnosti velmi staré kořeny, jeho počátky sahají až do dob římského impéria. Z počátku se využívalo především v lodním stavitelství. Techniky, které se při stavbě lodí uplatňovaly, se poté nejvíce zdokonalovaly v období 13. až 16. století (především v Itálii). K tomu, aby byla základní geometrie lodí uchována, se využívaly malé dřevěné modely. Neexistovaly výkresy, které by tvar lodí popisovaly.

¹ Absolvent strojího inženýrství na University of Edinburgh, zakládající člen Computer-aided Design Group, později profesor na University of East Anglia. Konzultant u Rolls-Royce, Boeing, General Motors a dalších.

První známé zmínky o konstruktivní geometrii, pomocí níž se definovaly křivky užívané v lodním průmyslu, pocházejí až z roku 1752.

V novodobé historii zaznamenalo geometrické modelování veliký pokrok v oblasti letectví. V roce 1944 publikoval Roy Liming² knihu *Analytical Geometry with Application to Aircraft*, ve které se poprvé objevilo klasické konstruování kombinované s výpočetními metodami (viz například [3]).

Konstruování křivek a ploch spočívalo v minulosti na metodách deskriptivní geometrie. Liming poprvé zavedl mnohem účinnější metody. Jako první začal popisovat křivky numericky. Výhody byly nesporné, neboť matematický popis je interpretován, na rozdíl od kresby či nákresu, vždy správně. Práce Liminga měla veliký ohlas a brzy se rozšířila i do dalších amerických společností pro výrobu letadel.

Kromě kružnic a kuželoseček, které se do té doby využívaly jak v lodním, tak v leteckém průmyslu, se začaly soustavně používat kubiky, plochy se rozdělily na části (tzv. pláty), které se definovaly matematickými rovnicemi. Na začátku šedesátých let 20. století James C. Ferguson³ matematicky popsal plochu s kubickými parametrickými křivkami, na místo ploch vytvářených do té doby graficky na základě oblouků kuželoseček.

V téže době dalším významným badatelem, který matematizoval technické výkresy povrchů letadel, byl Steven Anson Coons⁴. Pracoval na popisu obecných plátů ploch, které byly zadávány libovolnými okrajovými křivkami. Jeho teorie se staly základem pro definice ploch, které jsou dnes běžně užívané - např. B-spline nebo NURBS plochy.

V šedesátých letech 20. století se vyrábějí první počítače, které se využívají ve strojírenském průmyslu k řízení strojů. Postupně se tyto počítače rozšiřují do dalších odvětví. V této době však ještě nebyly známé metody, jak předávat počítačům data v numerické podobě. Limingova metoda se z počátku používala jen v leteckém průmyslu.

Technický vývoj grafického výstupu z počítače dovršují aktivní grafické obrazovky, jenž napomáhají efektivnímu konstruování křivek a ploch.

V Evropě přispěli velkým dílem k rozvoji geometrického modelování (a to právě v předávání dat počítači) nezávisle na sobě Francouzi Paul de Faget de Casteljau a Pierre Etienne Bézier.

Casteljau (narozen 1930 v Besançon) pracoval pro francouzskou automobilovou firmu Citroën. K zadávání křivek používal kontrolní polygon. Do té doby tato metoda nebyla nikdy použita. V diferenciální geometrii sice existoval pojem kontrolního polygonu (od roku 1923), ovšem nenalezl své uplatnění v praxi. Místo toho, aby se tedy křivka nebo plocha zadávala pomocí bodů, které na ni leží, zadává se pomocí blízkých bodů. Změna křivky či plochy se zajišťuje změnou poloh bodů kontrolního polygonu, nemanipuluje se tedy přímo s křivkou nebo plochou. Postup, který Casteljau používal, je dnes známý jako *algoritmus de Casteljau*. Firma Citroën však jeho práci držela v tajnosti a i když Casteljau navrhl své postupy už v roce 1959, zveřejněny byly až na konci sedmdesátých let 20. století.

Konkurenční francouzskou automobilkou byla firma Renault, ve které působil Bézier. Bézier (narozen 1910 v Paříži, zemřel 1999 v Paříži) se na začátku šedesátých let stává vedoucím konstrukčního oddělení a zabývá se tím, jak počítačově reprezentovat křivky a plochy. Lze dokázat, že křivky, které vyvinul, jsou shodné s těmi, které popsal Casteljau.

² Analytik, pracoval pro North American Aviation (výrobce letadel), společně s konstruktérem a designérem Edgardem Schmuedem matematizoval povrchy letounů.

³ Analytik u amerického výrobce letadel Boeing.

⁴ Profesor na MIT (Massachusetts Institute of Technology) ve strojním inženýrství, zaměstnanec u amerického výrobce letadel Chance Vought.

Dokonce je zcela nezávisle objeven také de Casteljau algoritmus. Bézierova práce byla velmi záhy publikována a R. A. Forrestem doplněna také o popis Bézierových křivek pomocí Bernsteinových polynomů (Casteljau používal Bernsteinovy polynomy již v padesátých letech). Díky tomu tyto křivky a plochy nesou jméno Béziera, přestože je Casteljau vyvinul mnohem dříve.

Kromě toho známý program UNISURF pro navrhování tvaru karosérií, který firma Renault používala, byl založen zcela na Bézierových křivkách a plochách.

Většina významných objevů v oblasti geometrického modelování byla až do sedmdesátých let 20. století izolována. Nakonec tyto snahy vyvrcholily vznikem nové vědní disciplíny CAGD. Bez zavedení počítačů do výroby by se ale tato disciplína jistě nemohla rozvinout.

Metody počítačového modelování se postupem času velmi zdokonalily a v současné době je k dispozici velmi kvalitní matematický aparát, který je stále aktivně rozvíjen. Výraznou změnu přineslo také používání racionálních Bézierových křivek a ploch a neuniformních racionálních B-spline křivek a ploch tzv. NURBS. Tyto metody umožňují generovat klasické geometrické prvky (kuželosečky, kulové plochy ...) za pomoci aproximace.

V posledních letech vývoj v oblasti geometrického modelování přinesl mnoho dalších typů křivek a ploch zaváděných k různým speciálním účelům.

2.2 Příklady křivek a ploch počítačové grafiky

Křivky a plochy můžeme popisovat různými způsoby – explicitně, implicitně či parametricky. Volba reprezentace křivky či plochy závisí na konkrétním účelu a aplikaci. V počítačové grafice se pro vyjádření křivek a ploch zřejmě nejčastěji používají parametrické rovnice. Nebudeme se nyní zabývat teorií parametrického popisu křivek a ploch, odkazují čtenáře na literaturu např. [1] nebo [5].

Pro jednoduchost začněme s křivkami, poté přejdeme k plochám.

Základním druhem křivek v počítačové grafice jsou křivky *polynomiální*. Z těchto křivek lze skládat křivky *po částech polynomiální*, jejichž segmenty jsou polynomiální křivky. Nejčastěji používanými polynomiálními křivkami jsou *kubiky*, tedy křivky třetího stupně. Křivky vyšších stupňů se většinou nepoužívají, protože se nežádoucím způsobem zvlňují a jsou náročné na výpočet.

Modelování křivek se realizuje většinou tak, že je definováno několik řídících bodů. Podle aplikace můžeme navíc přidávat další požadavky např. hladkost navazování, tečné vektory. Existují dva základní způsoby zpracování vstupní množiny řídících bodů a to *interpolace* a *aproximace*. Při interpolaci výsledná křivka prochází zadanými řídícími body, při aproximaci se k nim pouze blíží. Interpoláčnı metody nejsou v počítačové grafice příliš často používány. Uvedme si tedy příklady křivek aproximačních.

Patrně nejpoblárnější aproximační křivkou je *Bézierova křivka*, přičemž nejpoužívanější je opět kubika. Bézierova křivka n -tého stupně je určena $n+1$ body řídícího polygonu (kubika je tedy určena 4 řídícími body). Z definice této křivky vyplývá, že prochází prvním a posledním bodem řídícího polygonu, ostatní body pouze aproximuje. Nevýhodou takové křivky je, že při změně polohy jednoho bodu řídícího polygonu, dojde ke změně tvaru celé křivky. To se řeší dělením křivek na segmenty a jejich postupným napojováním. Více informací může čtenář nalézt v [2] nebo [4]. Další aproximační metodou jsou *Coonsovy kubiky*, které na rozdíl od Bézierových křivek neprocházejí krajními body řídícího polygonu. Dalším typem křivek jsou tzv. *B-spline* křivky. Ty se od předchozích liší tak, že se skládají z více segmentů. Například Coonsův kubický B-spline vznikne na-

pojováním Coonsových kubik. Obecnější křivky jsou potom tzv. NURBS – neuniformní racionální B-spline křivky.

Uvedené příklady křivek nejsou v žádném případě kompletní, odkazují čtenáře na literaturu, například [4], kde je možné nalézt další typy a podrobné popisy křivek.

Aparát konstruování křivek je rozšiřitelný do vyšší dimenze. Podobně jako u křivek, rozdělujeme i plochy na interpolační a aproximační. Opět se používají hlavně aproximační plochy, protože interpolace je ve vyšších dimenzích poměrně složitou úlohou. Plochy modelujeme pomocí zadávání sítě řídicích bodů, která tvoří v trojrozměrném prostoru mnohostěn. Opět můžeme přidávat další speciální podmínky.

Příkladem aproximačních ploch jsou *Bézierovy plochy*, *Coonsovy plochy* nebo *B-spline plochy*. Více typů může čtenář nalézt v [1], [2] nebo [4]. Bézierovy plochy $m \times n$ -tého stupně jsou definovány maticí řídicích bodů velikosti $(m+1) \times (n+1)$. Z definice této plochy vyplývá, že okrajovými křivkami plochy jsou křivky Bézierovy. Stejně jako u křivek se používají nejčastěji polynomy stupně tři.

Velmi zajímavou oblastí týkající se modelování ploch je jejich napojování (tzv. plátování), přičemž se požadují různé stupně hladkosti. Plátování se využívá při konstrukci složitějších tvarů a výhody jsou obdobné jako u křivek – změny poloh řídicích bodů ovlivňují výsledný tvar pouze lokálně.

3 Závěr

Geometrické modelování je obor, který se neustále vyvíjí. V současné době využívá počítačové modely prakticky každá oblast výroby. Rozvoj grafických editorů, tzv. CAD systémů, umožnil projektování na počítači v různých odvětvích průmyslu.

Podrobnější popis vývoje výpočetní geometrie a především geometrického modelování by mohl být zajímavým námětem například pro diplomovou práci.

Literatura

- [1] Drs L.: *Plochy ve výpočetní technice*. SNTL – Nakladatelství technické literatury, Praha, 1984.
- [2] Farin G.: *Curves and Surfaces for CAGD: A Practical Guide*. Morgan Kaufmann Publishers, San Francisco, USA, 2002.
- [3] Gerald E. F., Hoschek J., Kim M.: *Handbook of computer aided geometric design*. Elsevier Science B. V., Amsterdam, Netherland, 2002.
- [4] Mortenson M. E.: *Geometric Modeling*. Wiley Computer Publishing, New York, USA, 1997.
- [5] Žára J., Beneš B., Felkel P.: *Moderní počítačová grafika*. Computer Press, Praha, 1998.

Adresa

Mgr. Petra Surynková
Katedra didaktiky matematiky
Matematicko-fyzikální fakulta, Univerzita Karlova v Praze
Sokolovská 83
186 75 Praha 8
e-mail: petra.surynkova@mff.cuni.cz