

Odhad osy šroubové plochy reprezentované mračnem bodů

Petra Surynková

*Faculty of Mathematics and Physics, Charles University in Prague
Sokolovská 83, 186 75 Praha 8, Czech Republic
email: petra.surynkova@mff.cuni.cz*

Abstrakt. Analýza bodových mračen například z hlediska symetrií představuje důležitou úlohu v komplikovaném procesu rekonstrukce povrchů popisovaných bodovou množinou. V článku se budeme zabývat hledáním os šroubového pohybu ve speciálních bodových mračcích, která reprezentují šroubové plochy. Představíme nový iterační algoritmus, jehož výsledkem je odhad osy takové bodové množiny a ukážeme možnou úspornou reprezentaci popisovaného reálného povrchu. Analýzu navrženého algoritmu provedeme na počítačově generovaných datech. K implementaci programového prototypu používáme moderní výpočetní prostředí MATLAB.

Klíčová slova: Odhad osy, šroubová plocha, mračno bodů, 3D skenování

1 Motivace

Problematika digitální rekonstrukce povrchů přitahuje velkou pozornost komunity odborníků v praxi. Tento zájem je motivován širokými možnostmi, kde mohou být digitální rekonstrukce povrchů nebo fáze tohoto procesu aplikovány (stavební obory, reverzní inženýrství, navrhování architektonických a designových prvků, replikace tvarů skutečných předmětů pomocí 3D tisku, počítačové projektování, online marketing, ...), ale také výzkumnými výzvami, které problém skýtá. Obecná úloha spočívá v digitálním zdokumentování nějakého fyzického objektu (např. reálné stavby, geometrického modelu nějakého objektu, mechanické součástky), v tvorbě jeho počítačového modelu a v získání analytické reprezentaci, viz [2, 3, 7, 9, 10, 17]. Úsporný matematický popis umožňuje s objekty pracovat v matematických a modelovacích programech, přenášet data a zobrazovat je v reálném čase na počítači a na mobilních zařízeních.

Formálně je vstupem úlohy konečná neorganizovaná množina bodů v prostoru tzv. mračno bodů a výstupem pak systém analytických ploch takových, že body vstupní množiny leží na povrchu nebo v jeho blízkosti. Předpokládá se, že vstupní množina bodů odpovídá v prostoru reálnému povrchu, jinak by úloha nebyla řešitelná.

Algoritmy řešící rekonstrukce povrchů jsou popisovány v řadě publikací [2, 8, 9, 15, 17], přičemž se většinou jedná o metody rozdělující problém rekonstrukce do dílčích podproblémů. V základním pojetí se úloha člení na bodovou fázi (získávání bodového mračna a jeho analýza), polygonální fázi (aproximace povrchu polygonální sítí, [5]) a tvarovou fázi (reprezentace

povrchu souborem analytických ploch). Tento přístup volíme i v našem výzkumu a věnujeme se především bodové fázi procesu rekonstrukce. Konkrétně se zabýváme analýzou bodových mračen, která reprezentují speciální povrchy a to obecné šroubové plochy nebo jejich části. Během výzkumu nových metod pro digitální rekonstrukci se ukázalo, že nezastupitelnou roli pro získání kvalitního popisu objektu hraje právě precizní analýza vstupní bodové množiny. V naší práci se soustředíme na analýzu strukturovaných vstupních bodových množin z hlediska os šroubového pohybu. Nalezené osy lze využít v dalších fázích rekonstrukčního procesu a rovněž k úsporné reprezentaci dat.

V článku je nejdříve představen algoritmus pro hledání osy symetrie obecné rotační plochy. Tento algoritmus jsme navrhovali již v předchozím výzkumu, viz [12, 13, 14], přičemž zásadní výhoda algoritmu spočívá v možnosti zobecnění pro šroubové plochy. Dále je popsána modifikace tohoto algoritmu pro případ šroubových ploch. Nakonec je ukázáno experimentální vyhodnocení navrženého algoritmu s využitím počítačově generovaných dat. Závěr článku pojednává o dalším možném vývoji navržených algoritmů a budoucí práci.

2 Hledání osy obecné rotační plochy

V tomto oddíle připomeňme algoritmus pro hledání osy symetrie bodového mrače reprezentující obecnou rotační plochu nebo její část, viz [12, 13, 14]. Cílem bylo vyvinout algoritmus vycházející z jednoduché geometrické vlastnosti specifické zkoumané bodové množiny, zde množiny, která reprezentuje rotační plochy nebo její část.

Předpoklady na vstupní data navrženého algoritmu jsou následující. Mějme danu neprázdnou množinu n bodů $\mathcal{X} = \{X_i\}_{i=1}^n$ v eukleidovském prostoru E_3 získané z povrchu obecné rotační plochy. Informaci o tom, že vstupní bodové mrače popisuje právě tento speciální typ povrchu, předpokládáme. Nevěnujeme se tedy otázce automatického rozpoznávání typu povrchu. V reálných aplikacích získáváme body povrchu nejčastěji 3D skenováním různými typy skenovacích zařízení. Připouštíme, že body nejsou navzorkovány pravidelně (v reálné aplikaci dokonce ani přesně na povrchu), některé části bodové množiny mohou chybět. Výstupem algoritmu je odhad osy obecné rotační plochy.

Algoritmus pro hledání osy symetrie této speciální bodové množiny je iterační. V prvním kroku algoritmu volíme libovolnou počáteční polohu přímky pro optimalizaci a dále opakujeme:

- výpočet vektoru *distance*, jehož složky jsou vzdálenosti všech bodů rotační plochy od aktuální přímky (v prvním kroku od zvolené přímky),
- zavedení nové soustavy souřadnic v rovině,
- na základě minimalizace chybové funkce určujeme novou polohu optimalizované přímky.

Rozeberme podrobněji jednotlivé kroky. V rovině volíme novou kartézskou soustavu souřadnic. Do osy x tohoto souřadného systému umísťujeme aktuální přímku společně s pravouhlými průměty $\{X_i\}_{i=1}^n$ bodů $\{X_i\}_{i=1}^n$ vstupní množiny. Orientace přímky a poloha počátku nové soustavy souřadnic jsou určeny libovolně a to například tak, že určující bod aktuální přímky umísťujeme do počátku soustavy a orientaci této přímky volíme podle směrového vektoru. Funkční hodnoty odpovídají vzdálenostem bodů od aktuální přímky, tj. složkám vektoru *distance*. Takto získané body v soustavě souřadnic v rovině budeme značit $\{\bar{X}_i\}_{i=1}^n$.

Pro každý bod $\{\bar{X}_i\}_{i=1}^n$ v soustavě souřadnic v rovině zvolíme ε -okolí, $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$. Pro bod \bar{X}_i budeme toto okolí značit $B_\varepsilon(\bar{X}_i)$. Chybovou funkci, kterou v každém kroku algoritmu minimalizujeme, definujeme jako obsah množiny sjednocení všech okolí, tj.

$$(1) \quad S = \bigcup_{i=1}^n B_\varepsilon(\bar{X}_i).$$

Výpočet obsahu množiny sjednocení všech okolí z (1) provádíme pomocí známé stochastické výpočetní metody Monte Carlo [6].

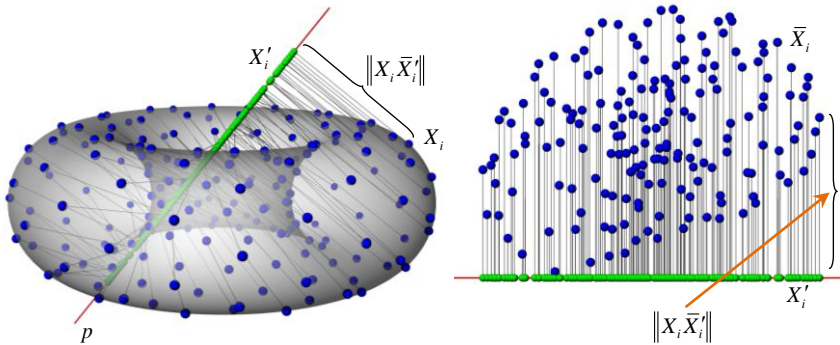
Hledáme minimum chybové funkce, neboť víme, že pro případ, kdy je aktuální přímka přímo osou rotační plochy, se okolí obrazů $\{\bar{X}_i\}_{i=1}^n$ nejvíce překrývají. Obsah S definovaný v (1) je tedy minimální. Neboť zvolíme-li za aktuální přímku přímo osu rotační plochy, body $\{\bar{X}_i\}_{i=1}^n$ ve zvolené soustavě souřadnic v rovině lze proložit křivku, která odpovídá polovině osového řezu rotační plochy. K této situaci se chceme přiblížit iteračním procesem, minimalizační metodou tak získáme odhad osy bodové množiny. Na obrázku 1 můžeme vidět ilustraci výpočtu v jednom kroku algoritmu, tj. výpočet vzdáleností jednotlivých bodů od aktuální přímky a překreslení situace do nové soustavy souřadnic v rovině.

Minimalizaci chybové funkce provádíme pomocí známé diferenciální numerické metody největšího spádu a to jak její obecnou verzí [4, 16], tak i námi navrženou modifikovanou verzí s konstantní délkou kroku.

Chybová funkce má celkem šest parametrů (pracujeme v eukleidovském prostoru E_3) – souřadnice určujícího bodu aktuální přímky a souřadnice jejího směrového vektoru, které v každém kroku algoritmu aktualizujeme. Jedná se tedy o reálnou funkci šesti proměnných.

Jednodušší variantu minimalizace dostáváme v případě, volíme-li modifikovanou metodu největšího spádu s konstantní délkou kroku. Pro optimalizaci směrového vektoru a určujícího bodu osy volíme ovšem tuto

délku rozdílnou převážně u množin, které obsahují řádově desetitisíce až statisíce bodů. U takto rozsáhlých množin se totiž výrazně projeví rozdílnost spádu těchto parametrů.



Obr. 1: Výpočet vzdáleností všech bodů vstupní množiny od aktuální přímky a zakreslení těchto vzdáleností do nové soustavy souřadnic v rovině

Složitější variantu představuje obecnější metoda největšího spádu s určováním délky kroku pomocí jednorozměrné minimalizace. Jednorozměrnou minimalizaci v každém kroku algoritmu realizujeme pomocí Newtonovy metody tečen [16]. Vypořádání správné volby parametrů nejen obecné metody největšího spádu, ale také Newtonovy metody tečen pro jednorozměrnou minimalizaci je často velmi komplikované. Pracujeme-li s reálnými množinami, volíme proto častěji metodu s konstantní délkou kroku.

Iterační proces je v obou případech ukončen v okamžiku, je-li splněna předem daná podmínka. Vhodné hodnoty ukončovacího parametru bylo nutné experimentálně vysledovat.

Testování tohoto algoritmu proběhlo již v předchozím výzkumu, viz [11, 12, 13, 14], proto se nyní zaměříme na jeho další zobecnění.

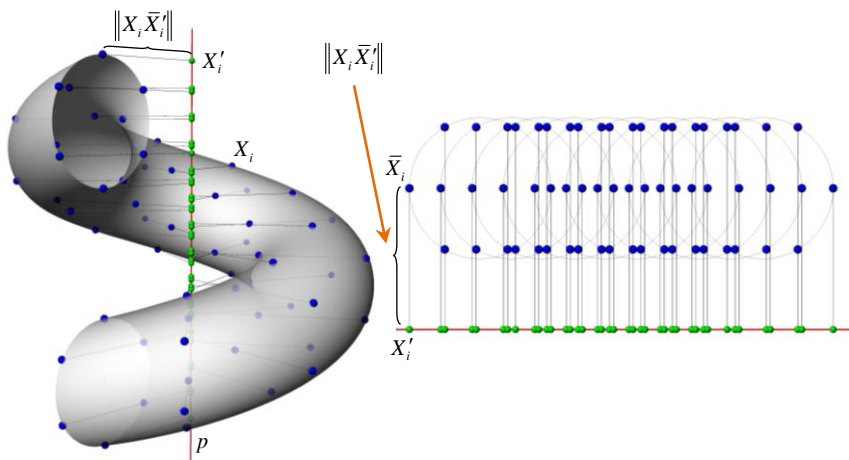
3 Hledání osy obecné šroubové plochy

Při navrhování algoritmu pro hledání osy šroubové plochy jsme vycházeli z geometrických vlastností šroubových ploch, přičemž jsme využili geometrické příbuznosti těchto ploch s plochami rotačními. Princip předchozího algoritmu byl proto navržen tak, aby bylo možné jej jednoduše modifikovat a využít geometrické souvislosti ploch rotačních a šroubových. Algoritmus pro hledání osy obecné šroubové plochy proto vychází z předchozího algoritmu a do jistého kroku je s předchozím algoritmem totožný. Rozeberme princip algoritmu.

Předpoklady na vstupní data navrženého algoritmu jsou následující. Mějme dānu neprázdnou množinu n bodů $\mathcal{X} = \{X_i\}_{i=1}^n$ v eukleidovském prostoru E_3 získané navzorkováním povrchu obecné šroubové plochy. Informaci o tom, že vstupní bodové mraĉno popisuje právě tento speciální typ povrchu, předpokládáme. Opět se tedy nevěnujeme otázce automatického rozpoznávání typu povrchu. Pripouštíme, že body nejsou navzorkovány pravidelně (v reálné aplikaci dokonce ani přesně na povrchu), některé části bodové množiny mohou chybět. Výstupem algoritmu je odhad osy obecné šroubové plochy.

Algoritmus pro hledání osy obecné šroubové plochy je opět iteraĉní. V prvním kroku algoritmu volíme libovolnou počáteĉní polohu přímky pro optimalizaci a dále opakujeme:

- výpoĉet vektoru *distance*, jehož složky jsou vzdálenosti všech bodů šroubové plochy od aktuální přímky (v prvním kroku od zvolené přímky)
- výpoĉet vektoru *translation*, jehož složky jsou velikosti posunutí ve směru aktuální přímky,
- zavedení nové soustavy souřadnic v rovině,
- na základě minimalizace chybové funkce urĉujeme novou polohu optimalizované přímky.



Obr. 2: Situace pro polohu aktuální přímky v ose šroubové plochy bez zavedení posunutí ve směru osy

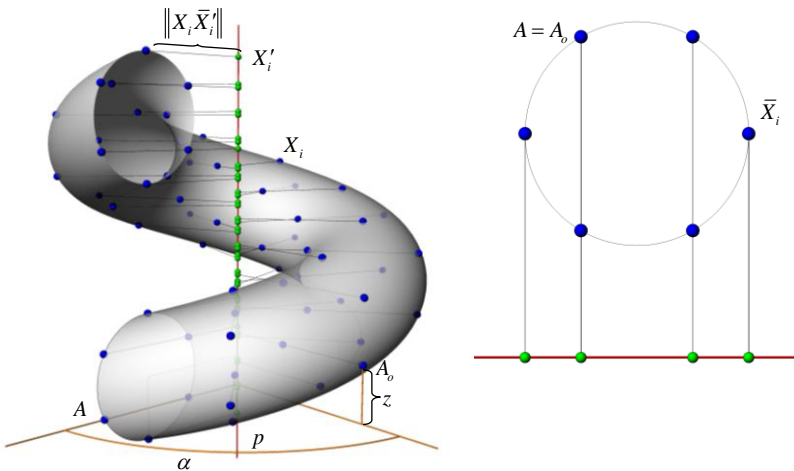
Rozeberme podrobněji jednotlivé kroky. Volba nové kartézské soustavy souřadnic v rovině je stejnā jako v předchozím algoritmu. Do osy x tohoto souřadného systému opět umisťujeme aktuální přímku společně s pravoúhlými průměty $\{X'_i\}_{i=1}^n$ bodů $\{X_i\}_{i=1}^n$ vstupní množiny. Funkĉní hodnoty odpovídají vzdálenostem bodů od aktuální přímky, tj. složkām vektoru *distance*. Nyní ale

od x -ových souřadnic takto získaných bodů v soustavě souřadnic v rovině odečteme velikost posunutí ve směru aktuální přímky. Takto získané body v soustavě souřadnic v rovině budeme značit opět $\{\bar{X}_i\}_{i=1}^n$.

Podívejme se na obrázek 2, kde je znázorněna situace pro polohu aktuální přímky v ose šroubové plochy. Nejdříve je uvažováno vkreslení bodů do pomocné soustavy souřadnic v rovině bez odčítání délek od x -ových souřadnic odpovídajících velikostem posunutí ve směru osy, tedy postup, který jsme užívali u rotačních ploch. Nyní je zřejmé, že je potřeba zavést další parametr, abychom v pomocné soustavě v rovině získali body, které lze proložit křivkou odpovídající jedné části osového řezu šroubové plochy. Pro každý bod $\{X_i\}_{i=1}^n$ vstupní množiny proto počítáme velikost posunutí ve směru aktuální přímky podle vzorce

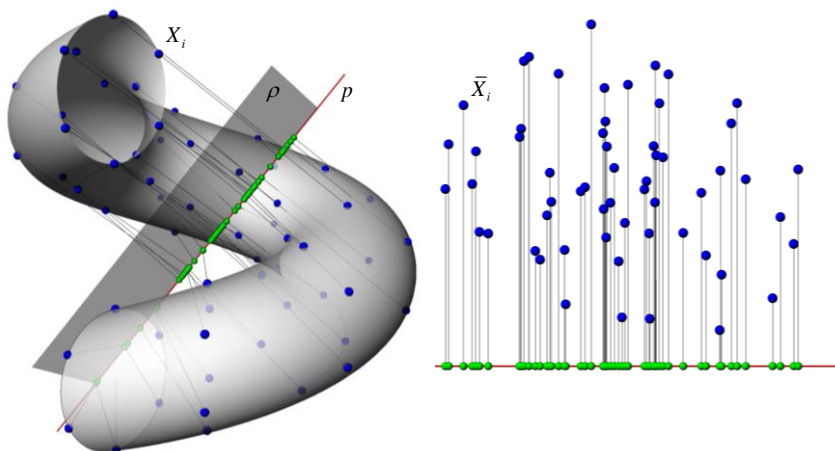
$$(2) \quad \frac{\alpha}{2\pi} \cdot p,$$

o kterou zmenšíme x -ovou souřadnici bodů $\{\bar{X}_i\}_{i=1}^n$. Tyto délky představují složky vektoru *translation*. Orientovaný úhel α značí velikost otočení bodu $\{X_i\}_{i=1}^n$ (měřeno od libovolně zvolené poloroviny s hraniční přímkou v aktuální přímce) a p značí velikost výšky závitů. Na obrázku 3 je ukázáno, jak se situace v pomocné soustavě souřadnic v rovině změní, zavedeme-li výpočet posunutí.



Obr. 3: Situace pro polohu aktuální přímky v ose šroubové plochy se zavedením posunutí ve směru osy

Podívejme se na situaci, kdy aktuální poloha přímky neodpovídá ose šroubové plochy. Tato situace je znázorněna na obrázku 4. Úhel potřebný pro výpočet posunutí ve směru aktuální přímky v jednom kroku algoritmu počítáme od libovolně zvolené poloroviny (na obrázku 4 polorovina ρ). Vidět můžeme rovněž výsledek v soustavě souřadnic v rovině.



Obr. 4: Situace pro obecnou polohu aktuální přímky se zavedením posunutí ve směru osy

Další postup je stejný jako v algoritmu pro výpočet osy obecné rotační plochy. Pro každý bod $\{\bar{X}_i\}_{i=1}^n$ v soustavě souřadnic v rovině zvolíme ε -okolí, $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \in R$. Pro bod \bar{X}_i budeme toto okolí značit $B_\varepsilon(\bar{X}_i)$. Chybovou funkci, kterou v každém kroku algoritmu minimalizujeme, definujeme opět jako obsah množiny sjednocení všech okolí definovaný v (1). Výpočet obsahu množiny sjednocení všech okolí z (1) provádíme rovněž pomocí stochastické výpočetní metody Monte Carlo [6].

Hledáme minimum chybové funkce, neboť víme, že pro případ, kdy je aktuální přímka přímo osou šroubové plochy, se okolí obrazů $\{\bar{X}_i\}_{i=1}^n$ nejvíce překrývají. Obsah S definovaný v (1) je tedy minimální.

Minimalizaci chybové funkce provádíme opět pomocí diferenciální numerické metody největšího spádu a to jak její obecnou verzi [4, 16], tak i modifikovanou verzi s konstantní délkou kroku. Iterační proces je v obou případech ukončen v okamžiku, je-li splněna předem daná podmínka. Vhodné hodnoty ukončovacího parametru bylo nutné experimentálně vysledovat.

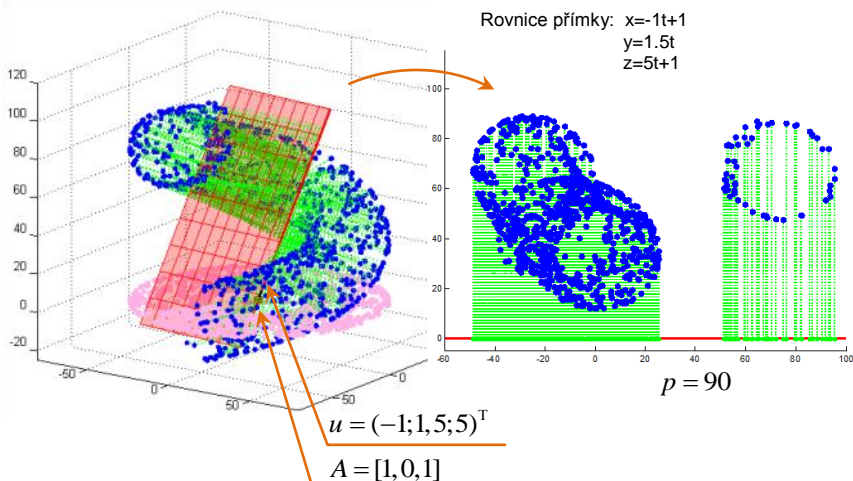
Chybová funkce má tentokrát sedm parametrů (pracujeme v eukleidovském prostoru E_3) – souřadnice určujícího bodu aktuální přímky, souřadnice jejího

směrového vektoru a výšku závitů. Jedná se tedy o reálnou funkci sedmi proměnných. Těchto sedm parametrů v každém kroku algoritmu aktualizujeme a na základě jejich nových hodnot určujeme novou polohu optimalizované přímky.

4 Experimentální vyhodnocení navrženého algoritmu

Navržený algoritmus pro hledání osy obecné šroubové plochy jsme implementovali v moderním výpočetním prostředí MATLAB. Abychom mohli provést analýzu navrženého algoritmu a ladění volitelných parametrů minimalizačních technik začali jsme pracovat s počítačově generovanými daty. Ověřování teoretických návrhů pomocí experimentálních implementací je navíc standardní a velmi moderní přístup.

Předvedme navržený algoritmus na příkladě experimentální bodové množiny. Předpokládejme, že je dána konečná množina bodů, které jsou navzorkovány náhodně na povrchu části osové cyklické šroubové plochy (plocha vzniká šroubováním kružnice v rovině osy) a tvoří tedy pravidelnou síť. V úvahu nyní nebereme nepřesnost, která by při vzorkování reálného povrchu mohla vzniknout. Body vstupní množiny tedy leží přesně na šroubové ploše.

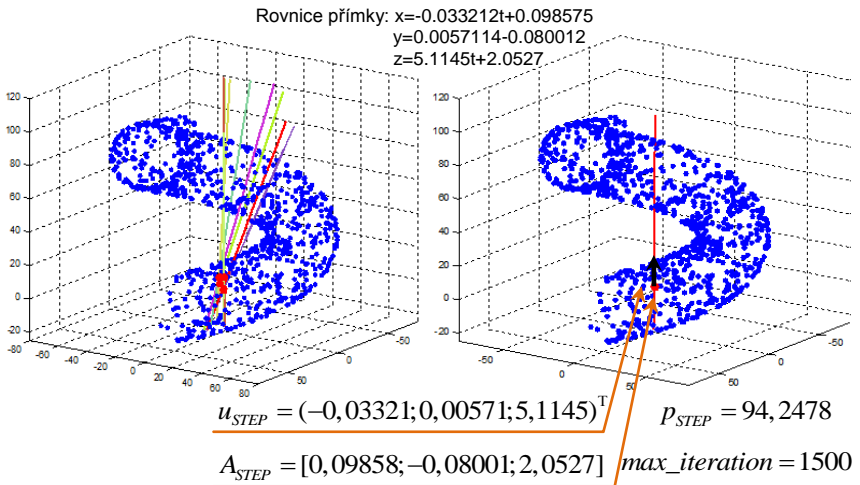


Obr. 5: Body náhodně rozmístěné na části osové cyklické šroubové plochy, počáteční poloha přímky a zakreslení vzdáleností od přímky do nové soustavy souřadnic v rovině se zavedením posunutí

Minimalizaci chybové funkce jsme provedli modifikovanou metodou největšího spádu, neboť je tato metoda stabilnější. V našich počátečních experimentech se ukázalo, že vyřešit úlohu hledání osy šroubové plochy se

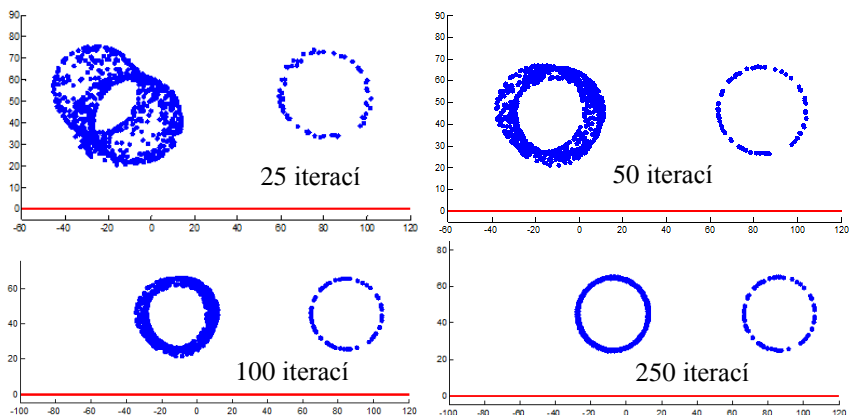
stává dramaticky obtížnější, jak se zvyšuje počet bodů vstupní množiny a rovněž v případě volíme-li obecnější metodu minimalizace. V experimentech se také ukázalo, že výsledky obecné a modifikované metody největšího spádu se téměř shodují, rozhodli jsme se proto využívat především modifikované verze metody největšího spádu.

Vstupní množinu bodů a počáteční polohu přímky, kterou optimalizujeme, vidíme na obrázku 5. Předloženy jsou parametrické rovnice počáteční polohy přímky a situace v soustavě souřadnic v rovině. Postupný výpočet odhadu osy šroubové plochy modifikovanou metodou největšího spádu a výsledný odhad osy znázorňuje obrázek 6. Předloženy jsou rovněž souřadnice určujícího bodu A_{STEP} a směrového vektoru u_{STEP} této přímky a odhad výšky závitu p_{STEP} . Uvádíme také celkový počet iterací minimalizační techniky, tj. parametr $max_iteration$. Vykreslujeme také situaci v soustavě souřadnic v rovině pro několik kroků algoritmu, viz obrázek 7.



Obr. 6: Postupný výpočet odhadu osy šroubové plochy modifikovanou metodou největšího spádu a výsledný odhad osy

Při zkoumání bodových množin jsme někdy narazili na problém jak správně určit vhodnou počáteční polohu přímky, která se bude modifikovat. Na volbě počáteční polohy závisí dobrý průběh minimalizační metody. Při použití našeho postupu pro hledání osy obecné šroubové plochy proto doporučujeme volit počáteční polohu přímky v blízkosti očekávaného výsledku. Takovou volbu lze snadno provést na základě vizualizace dat.



Obr. 7: Situace v soustavě souřadnic v rovině pro několik kroků algoritmu

5 Závěr a budoucí práce

V článku jsme prezentovali nový algoritmus pro hledání osy obecné šroubové plochy, který může být použit k řešení dílčích fází rekonstrukce povrchů. Vycházeli jsme přitom z již navrženého algoritmu pro hledání os obecných rotačních ploch. Nalezené osy jak rotačních tak i šroubových ploch lze využít k úsporné reprezentaci dat. K popisu plochy stačí uvažovat pouze osu plochy a polovinu osového řezu u rotačních ploch případně jednu část osového řezu u šroubových ploch. Těmto osovým řezům říkáme polomeridiány a jejich přibližný průběh získáme ortogonálním prokládáním bodů v pomocné soustavě souřadnic v rovině křivkou (uvažujeme výslednou situaci v soustavě souřadnic v rovině), viz [1]. K popisu plochy tak není potřeba vstupní množina bodů.

V další práci hodláme pokračovat v analýze dalších typů množin a rozšířit náš výzkum o bodové množiny reprezentující skutečné objekty.

Literatura

- [1] S. J. Ahn: *Least Squares Orthogonal Distance Fitting of Curves and Surfaces in Space*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, Germany, 2004
- [2] M. E. Algorri, F. Schmitt: *Surface Reconstruction from Unstructured 3D Data*, Journal, Computer Graphics Forum, Volume 15 (1), pp. 47-60, John Wiley & Sons, 1996
- [3] T. K. Dey: *Curve and Surface Reconstruction*, Cambridge University Press, USA, 2007
- [4] O. Došlý: *Základy konvexní analýzy a optimalizace v \mathbb{R}^n* , MuniPress – nakladatelství Masarykovy univerzity v Brně, Přírodovědecká fakulta, 2005

- [5] H. Edelsbrunner: *Geometry and Topology for Mesh Generation*. Cambridge University Press, United Kingdom, 2001
- [6] F. Fabian, Z. Kluiber: *Metoda Monte Carlo a možnosti jejího uplatnění*, Prospektum, Praha, 1998
- [7] P. Fua, P. T. Sander: *Reconstructing Surfaces from Unstructured 3D Points*, Proceedings Image Understanding Workshop, San Diego, USA, pp. 615-625, 1992
- [8] A. Iske: *Multiresolution Methods in Scattered Data Modelling*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, Germany, 2004
- [9] A. Jeměljanov: *Surface Reconstruction from Clouds of Points*, Doctoral Thesis, University of West Bohemia in Pilsen, Faculty of Applied Sciences, Czech Republic, 2004
- [10] H. Pottmann, A. Asperl, M. Hofer, A. Kilian: *Architectural Geometry*, Bentley Institute Press, USA, 2007
- [11] P. Surynková: *Analýza bodové množiny*, Sborník příspěvků 32. konference o geometrii a grafice, Železná Ruda – Špičák, Česká republika, str. 209-224, Fakulta aplikovaných věd, Západočeská univerzita v Plzni, 2012
- [12] P. Surynková: *Search for the Axis of the General Surfaces of Revolution*, Sborník příspěvků 33. konference o geometrii a grafice, Horní Lomná, Česká republika, str. 221 - 232, Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava, 2013
- [13] P. Surynková: *Analýza bodových množin reprezentující povrchy technické praxe*, disertační práce, Matematicko-fyzikální fakulta UK v Praze, 2014
- [14] P. Surynková: *Algoritmy pro testování osové symetrie na strukturovaných bodových mračnecích*, Časopis G, Volume (), str. 39-54, nakladatelství, Slovensko, 2014
- [15] B. Toll, F. Cheng: *Surface Reconstruction from Point Clouds*, Proceedings Machining Impossible Shapes, Michigan, USA, pp. 173-178, Springer Science+Business Media, 1999
- [16] X. Yang: *Introduction to Computational Mathematics*, World Scientific, Singapore, 2008
- [17] M. Varnuška: *Rekonstrukce povrchů geometrických objektů z roztroušených bodů*, Diplomová práce, Západočeská univerzita v Plzni, Fakulta aplikovaných věd, Česká republika, 2002