

# Rekonstrukce kvadratických plátů z mračna bodů

Šárka Voráčová, Petra Surynková

*Katedra aplikované matematiky, Fakulta dopravní ČVUT v Praze  
Na Florenci 25, 110 00 Praha  
voracova@fd.cvut.cz*

*Katedra didaktiky matematiky, MFF, Univerzita Karlova v Praze  
Sokolovská 83, 186 75 Praha 8  
Petra.Surynkova@mff.cuni.cz*

**Abstrakt.** V řadě technických oborů, jako jsou například reverzní inženýrství nebo počítačové vidění, je zapotřebí rekonstruovat plochy z husté množiny bodů získaných 3D skenerem. Je výhodné rozdělit povrch objektu na pláty, jež by bylo možné proložit co možná nejjednodušším typem algebraické plochy. Naším cílem je určit hranice kvadratických plátů na základě diskrétní křivosti polygonální aproximace plochy.

*Klíčová slova:* segmentace, kvadriky, křivosti plochy, rekonstrukce plochy

## 1 Úvod

Rekonstrukce povrchů z mračna bodů představuje velmi moderní a široce používanou metodu v digitalizaci reálných povrchů. Tato zajímavá problematika z oblasti počítačové grafiky má své uplatnění v mnoha odvětvích a její aplikovatelnost se neustále rozrůstá. Hledání výsledného zrekonstruovaného povrchu představuje netriviální problém, neexistuje všeobecný řešící postup, který by byl použitelný pro libovolné zadání této úlohy a libovolné mračno bodů. Výslednou rekonstruovanou plochu chceme obdržet v co nejkompaktnějším tvaru, tj. vyjádřenou pokud možno parametricky nebo implicitně. V konečné fázi je rekonstruovaná plocha vizualizovaná jako 3D model v modelovacím programu.

## 2 Reprezentace povrchu

Specifická úloha, kterou řešíme, je zadaná pomocí neorganizované konečné množiny bodů (mračno bodů) v prostoru na vstupu, přičemž úkolem je vytvořit rekonstruovaný povrch plochy takový, že body vstupní množiny leží na nebo blízko povrchu.

Mračno bodů reprezentující i velmi jednoduché plochy sestává při vysokém rozlišení skeneru z mnoha milionů bodů, jež jsou uloženy ve struktuře popisující geometrické i topologické údaje. V ideálním případě tyto body leží přímo na povrchu plochy a jsou to tedy přesně polohy bodů na povrchu objektu. V reálných aplikacích však může velmi často docházet k chybám a nepřesnostem v měření [4, 7]. Další komplikací je, že povrch reálného objektu většinou nelze zachytit pouze jedním skenováním z jednoho výchozího bodu. Z jedné pozice skeneru může být totiž přímo

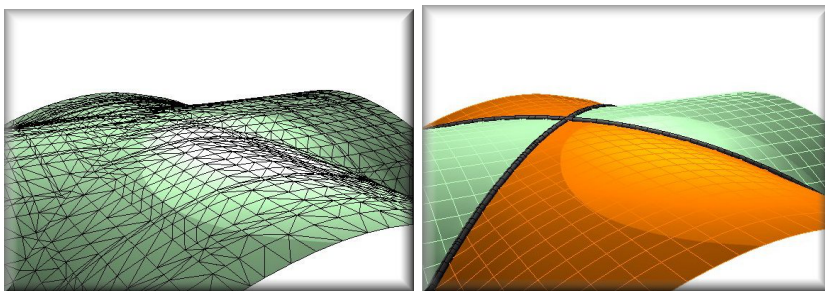
viditelná pouze část objektu. Tento problém se řeší tzv. registrací [10]. Skenování se provádí vícekrát z různých stanovíšť a získaná mračna bodů se následně slučují. Počet těchto dílčích snímaní se odvíjí od členitosti objektu, například obsahuje-li díry nebo je jinak komplikovaný, je nutné ho provádět vícekrát. Každé takto získané mračno bodů je reprezentováno v různých kartézských soustavách souřadnic. Sloučením bodů do jedné kartézské soustavy souřadnic získáváme mračno bodů, které může obsahovat redundantní data [7, 4], tedy body, které nepřinášejí žádnou novou informaci nebo leží navzájem příliš blízko sebe. K odstranění nadbytečných bodů a k filtrování nežádoucích šumů slouží celá řada tzv. decimálních algoritmů (thinning algorithms) [6, 7]. Tyto postupy tvoří tzv. bodovou fázi (point phase) procesu rekonstrukce povrchu [10].

Samotná rekonstrukce obecné plochy, o jejíž topologii nemáme žádné informace, je velmi komplikovaným problémem, který nebyl doposud uspokojivě vyřešen. Algoritmy jsou většinou založeny na určení konvexního obalu, Voroneho diagramu a odhadu tečných rovin [2, 3, 8]. Spolehlivějších výsledků dosáhneme, pokud využijeme znalosti o typu plochy. Mnohé systémy pro zpracování mračna bodů již jsou vybaveny nástroji, které úspěšně sestojí drátěný model povrchu, pokud jsou uživatelem zadány doplňující informace o typu plochy.

Nejpoužívanější výslednou reprezentací povrchu objektu je polygonální síť (mesh), nejčastěji trojúhelníků (Obr.1). Tato po částech lineární interpolace je výhodná pro následné geometrické operace, jako např. metodu sledování paprsku, výpočet průniku, apod. Nevýhodou oproti parametrické, implicitní, nebo CSG reprezentaci je paměťová i výpočetní náročnost. Pro účely stavitelství, architektury a digitální dokumentace památek je proto do rekonstrukce povrchu přidána ještě tzv. tvarová fáze (shape phase) [10]. Tento proces převádí síť aproximující povrch do CAD reprezentace, která je vhodná pro další zpracování, vizualizaci nebo různé simulace. Jde tedy o nahrazení sítě hladkým povrchem, který aproximuje zadané mračno bodů.

### 3 Segmentace

Nejdůležitější součástí tvarové fáze je segmentace. Segmentací rozumíme dekompozici mračna bodů na jednotlivé pláty, které můžeme považovat dle nějakého kritéria za diskrétní vzorek části jednoduché plochy. [10]. Jinými slovy jde o nalezení základních geometrických prvků (geometric primitives), tj. rovinných částí objektu, částí válcových, kuželových, kulových ploch nebo jiných speciálních ploch. Při segmentaci rozdělíme vstupní data naskenovaného objektu na komponenty, které následně aproximujeme daným typem plochy. Nepopisujeme tedy povrch pomocí jedné plochy, což v praxi většinou není ani možné, ale pláty, které na sebe napojujeme. Je důležité správně rozpoznat skutečné hrany objektu, ve kterých



Obrázek 1: Reprezentace povrchu trojúhelníkovou sítí a válcovými pláty

budeme jednotlivé části napojovat ostře (spojitost  $G^0$ ).

Segmentace sleduje dva cíle. V první řadě musí být každá komponenta aproximována částí geometrického primitiva. Za druhé se snažíme, aby výsledných částí bylo co možná nejméně a aby oddělovací hrany byly skutečné. Tedy dvě sousední komponenty musí představovat různá primitiva s různou geometrií. Segmentace není plně automatická, obzvláště ne při rekonstrukci objektů z oblastí jako je architektura.

Existuje celá řada segmentačních technik, jejich úspěšnost závisí na geometrii zkoumaného objektu, přesnosti skeneru a v neposlední řadě zpracování bodové fáze. Segmentační techniky můžeme rozdělit do dvou kategorií.

- *Hranová segmentace* (Edge-based): Identifikujeme vrcholy, které patří dle nějakého kritéria hraně a tyto body potom spojíme - vytvoříme hladkou křivku, představující hranici mezi jednotlivými pláty.
- *Plátová segmentace* (Region-based): Spojujeme vrcholy do oblastí příslušející základním plochám. Hrany poté určíme jako průnikové křivky ploch.

Prvním krokem hranové segmentace je určení bodů zájmu. Jsou to body, jež leží blízko hran - křivek nespojitosti a spojitosti nejvýše  $G^0$ . Všechny typ hran detekujeme dle průběhu odhadu křivosti plochy. Mezi body zájmu patří body, v nichž nabývá křivost extrému, nebo v nich mění znaménko. Extrémní hodnoty, které jsou nižší než nastavený práh tolerance neuvažujeme. Práh tolerance nastavíme empiricky dle kvality naměřených bodů, obecně se doporučuje hodnota kolem desetiny největší křivosti. Dalším krokem je interpolovat body spojitými křivkami - hran napojení plátů. Pro určení incidenčních vazeb nejprve zkoumáme širší okolí každého z bodů a zjišťujeme, zda křivost v jejich okolí chová podobně. Tím získáme částí hran, jež s snažíme v závěrečné fázi spojit a tím definovat jednotlivé pláty segmentace.

Mezi nejznámější plátové segmentace patří *Split and merge* [5], či zdola pracující algoritmus *Region growing* [1, 13]. Technika *Split and merge* rekurzivně dělí plochu až zůstanou jen komponenty jež je možné aproximovat jedním plátem (většinou parametricky určeným). Tím ale vzniknou umělé hrany, proto v druhém krku spojujeme sousední komponenty jež s danou tolerancí splňují kritéria stejné geometrie. Naproti tomu u přírůstkového algoritmu *Region growing* začínáme se vzorkem bodů (seed) jež určují jednotlivé komponenty. K těmto bodům poté přidáváme jejich sousedy, pokud vykazují stejné lokální vlastnosti. Na závěr zkontrolujeme, zda nemůžeme spojit sousední komponenty. Klíčovou roli hraje správná volba počáteční množiny bodů. Většinou používáme jako kritérium výběru odhad křivosti ploch [13].

Oba dva přístupy mají své silné i slabé stránky, proto se ukazuje, že robustní segmentace dosáhneme kombinací obou postupů [14]. Klíčovou roli hrají odhady lokálních invariantů ploch - hlavních křivosti, Gaussovy a střední křivosti. Pomocí nich rozhodujeme o homogenitě oblastí i o hranových vrcholech sítě. Pro odhad lokálních invariantů plochy nahrazené sítí trojúhelníků existuje celá řada přístupů, vhodnost jejich použití záleží na typu plochy, hustotě i kvalitě sítě [1].

Všechny segmentační metody využívají informaci o lokálních vlastnostech plochy v okolí zkoumaného bodu. Tyto vlastnosti u spojitých ploch dobře popisují křivosti plochy, u polygonální reprezentace se musíme spokojit s diskrétním odhadem křivosti.

## 4 Odhad křivosti plochy

Hlavním problémem při odhadování křivosti plochy ve vrcholu diskrétní reprezentace je, že křivost je lokální vlastnost a jako taková je citlivá na nepřesnosti měření. Cílem je, aby navržený algoritmus byl při rozumné výpočetní složitosti co možná nejrobustnější.

Existují desítky heuristických metod pro odhady křivosti plochy [9]. Pokud je nám známo, neexistuje žádné srovnávací kritérium jež by umožnilo klasifikaci metod. Je to zřejmě dáno tím, že na kvalitu odhadu má vliv mnoho faktorů - typ povrchu, šum i způsob diskretizace povrchu. Mezi technikami pro odhad křivosti je možné vysledovat tři různé přístupy.

1. Diskrétní diferenciální geometrie
2. Volba lokální parametrizace, užití diference
3. Aproximace okolí bodu hladkou plochou

### 4.1 Diskrétní diferenciální geometrie

V diferenciální geometrii popisujeme lokální chování plochy pomocí křivosti. Ty můžeme zavést pomocí shape operátoru  $S$ , což je symetrický lineární

operátor tečného vektorového prostoru plochy v daném bodě

$$S(\vec{v}) = \nabla_v \vec{n}.$$

Obraz vektoru  $\vec{v}$  určuje míra změny normály plochy  $\vec{n}$  ve směru  $\vec{v}$ . Vlastní čísla a vlastní vektory matice operátoru jsou hlavní směry a hlavní (extrémální) křivosti  $\kappa_1, \kappa_2$ . Gaussova křivost je determinant matice shape operátoru, tedy je součinem hlavních křivostí. Střední křivost je polovinou stopy shape operátoru.

Pokud je povrch reprezentován sítí trojúhelníků, odhadujeme křivost plochy jen v daných bodech na základě nejbližších sousedů (Obr.2). Nejpoužívanější a nejrychlejší způsob je využití úhlového defektu. Necht  $V$  je vrchol diskretizované plochy. Úhlový defekt ve vrcholu  $V$  je reálné číslo  $2\pi - \sum_i \alpha_i$ , kde  $\alpha_i$  jsou úhly při vrcholu  $V$  všech trojúhelníků plochy incidentních s bodem  $V$ . Gaussova diskretní křivost ve vrcholu je vydělením úhlového defektu vhodným koeficientem  $S(V)$ . Koeficient  $S(V)$  je zvolen tak, aby odhad odpovídal spojitě Gaussově křivosti [12, 9]. Některé algoritmy počítají třetinu plochy všech trojúhelníků incidentních s vrcholem, jiné obsah buňky duálního grafu triangulační sítě, nebo je koeficient určen jednotně pro všechny vrcholy  $S(V) = 2\pi$ .

$$GK = \frac{1}{S(V)}(2\pi - \sum_i \alpha_i)$$

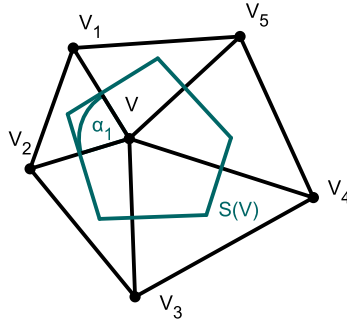
Je třeba poznamenat, že lokální Gaussova křivost není invariantní ke způsobu diskretizace. Naproti tomu součet všech lokálních Gaussových křivostí ve všech vrcholech plochy je nezávislý na způsobu výběru bodů plochy. Ovšem tato tzv. globální Gaussova křivost nemá pro účely segmentace plochy žádné využití.

## 4.2 Aproximace okolí bodu hladkou plochou

Okolí bodu  $V$  proložíme nějakou vhodnou, většinou kvadratickou plochou. Nabízí se užít oskulačního paraboloidu, ale empirické výsledky ukazují, že ne vždy je výpočetní náročnost úměrná kvalitě výsledného odhadu. Pro získání oskulačního paraboloidu je třeba odhadnout normálu plochy v bodě  $V$ . V lokální soustavě souřadné bude osa  $z$  totožná s normálou, počátek v bodě  $V$ , osy  $x, y$  volíme libovolně. Hledaná paraboloid bude popsán kvadratickou funkcí

$$z = 1/2(s_1x^2 + 2s_3xy + s_2y^2)$$

Metodou nejmenších čtverců určíme neznámé koeficienty  $s_1, s_2, s_3$ . Dle typu dat rozhodneme, jak velké okolí bodu budeme počítat. Shape operátor



Obrázek 2: Okolí vrcholu  $V$  v trojúhelníkové síti

$S$  je pak určen maticí

$$S = \begin{pmatrix} s_1 & s_3 \\ s_3 & s_2 \end{pmatrix}$$

Vlastní čísla  $S$  jsou pak odhady hlavních křivostí, vlastní vektory určují hlavní směry, determinant je odhadem Gaussovy křivosti.

Namísto proložení okolí bodu spojitou plochou můžeme jen hledat křivky na ploše. Každý soused plochy určuje jeden směr v tečné rovině. Pro něj odhadneme normálovou křivost. Nechť je okolí bodu  $V$  tvořeno body  $V_i$  (Obr.2). Vektor normály plochy  $\vec{n}$  v bodě  $V$  získáme odhadem tečné roviny, tj. roviny aproximující okolí bodu  $V$ . Každý bod okolí určuje jeden směr v tečné rovině. Normálovou křivost tohoto směru  $\kappa_i$  odhadneme jako křivost kružnice procházející body  $V$  a  $V_i$ . Střed kružnice leží na normále  $n$ .

$$\kappa_i = \frac{2(\vec{n}, (V_i - V))}{|(V_i - V)|^2}$$

Dosazením všech normálových křivostí do Eulerova vztahu

$$\kappa_i = \kappa_1 \cos^2(\alpha + \varphi_i) + \kappa_2 \sin^2(\alpha + \varphi_i)$$

získáme přeurčenou soustavu rovnic pro neznámý úhel  $\alpha$  a hledané hlavní křivosti  $\kappa_1, \kappa_2$ .

## 5 Rekonstrukce kleneb

Naším úkolem je rekonstruovat povrch kleneb historických objektů z naskenovaného mračna bodů. Taková rekonstrukce pak může sloužit pro dokumentaci historických objektů, zkoumání odchylek skutečného povrchu od

teoretických ploch a následně i odstranění chyb v měření. Problém rekonstrukce plochy klenby je zjednodušen už samotným faktem, že klenbu je možné považovat za výškové pole a pro prvotní ploškovou reprezentaci můžeme s úspěchem využít známe algoritmy. Pro vytvoření sítě reprezentující povrch jsme použily Delauneho triangulaci půdorysu bodů. Tato triangulace teoreticky zaručuje kvalitu sítě s přijatelnou výpočetní složitostí [11].

Ve valné většině jsou plochy kleneb tvořeny částmi velmi jednoduchých a dobře rozpoznatelných ploch - roviny, kulové plochy, válcové a kuželové plochy. Naším cílem je využít této znalosti a aproximovat naměřené mračno bodů vhodnou kvadrikou. Pro segmentaci kvadrik se užití křivostí ploch přímo nabízí: pomocí hlavních křivosti rozpoznáme planární i kruhové body, odlišíme oblasti příslušející k různým válcovým plochám, odlišíme body na rozvinutelných plochách [15].

Konečným krokem rekonstrukce je proložení segmentovaných podmnožin bodů vhodnými plochami, v našem případě kvadratickými pláty. Nechť je dáno  $n$  bodů  $X_i = [x_i, y_i, z_i]$ . Kvadriku budeme hledat v implicitním tvaru  $F(X, \vec{s}) = 0$ .

$$F(X, \vec{s}) = s_1x^2 + s_2y^2 + s_3z^2 + 2s_4xy + 2s_5xz + 2s_6yz + 2s_7x + 2s_8y + 2s_9z + s_{10}, \quad (1)$$

kde  $\vec{s} = (s_1, s_2, \dots, s_{10})$  je neznámý vektor parametrů. Koeficienty  $s_i$  určíme metodou nejmenších čtverců.

## 6 Závěr

Popsané metody odhadu křivostí byly otestovány na vygenerovaných bodech válcové plochy, kulové plochy i roviny. Ukazuje se, že při dostatečně hustém vzorku správně naměřených hodnot jsou výsledky odhadu oskulačním paraboloidem i výpočtem úhlového defektu srovnatelně kvalitní. Obě dvě metody se umí vypořádat i s malými chybami měření, avšak větší šum způsobí až desetinásobně větší odchylky od původních referenčních hodnot. Robustnější výsledky dává odhad pomocí širšího okolí, avšak za cenu vyšší výpočetní složitosti. Řešením je vícenásobné filtrování (např. Gaussův filtr), jež může být použito jen jako prvotní fáze zpracování bodů.

## Reference

- [1] Abdelamlek, N.: *Surface Curvatures and 3D Range Images Segmentation*, Pattern Recognition 23, 8, pp 807-817, 1990
- [2] Amenta, N., et al.: *A Simple Algorithm for Homeomorphic Surface Reconstruction*, International Journal of Computational Geometry and Applications, 2000
- [3] Amenta, N., et al.: *A New Voronoi-Based Surface Reconstruction Algorithm*, International Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques, 1998

- [4] Dey, T.: *Curve and Surface Reconstruction*, Cambridge University Press, USA, 2007
- [5] Faugeras, O., Hebert, M., Pauchon, E: *Segmentation of Range Data into Planar and Quadric Patches*, Proc. of IEEE Conference on Computer Vision and pattern Recognition, pp. 8-13, 1983
- [6] Heckbert, P. Garland, M. : *Survey of Polygonal Surface Simplification Algorithms*, SIGGRAPH'97, pp 41 - 48, 1997
- [7] Iske, A.: *Multiresolution Method in Scattered Data Modelling*, Technische Universität München, Germany, 2004
- [8] Mencl, R., et al.: *Interpolation and Approximation of Surfaces from Three-Dimensional Scattered Data Points*, State of the Art Report, EURORAPHS'98, 1997
- [9] McIvor, A. M., Valkenburg, R. J.: *A comparison of local surface geometry estimation methods* Machine Vision and Applications, 10:17-26, 1997
- [10] Pottmann, H., Asperl, A., Hofer, M., Kilian, A.: *Architectural Geometry*, Bentley Institute Press, USA, 2007
- [11] Preparata, P., Samos, M.: *Computational geometry*, Springer - Verlag New York, 1985
- [12] Tomiczková, S.: *Křivosti* 28. Konference o geometrii a grafice, 2009
- [13] Trucco, E., Fisher, RB.: *Experiments in Curvature-Based Segmentation of Range Data* IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, Vol. 17, No. 2, pp. 177-182, 1995
- [14] Yokoya, Y, Levine, M.: *Range Image Segmentation Based on Differential Geometry: a Hybrid Approach*, IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence 11, 6, pp 643-649, 1989
- [15] Yang, M., Lee, E.: *Segmentation of Measured Point Data Using a Parametric Quadric Surface Approximation*, Computer Aided Design 31, 7, 449-458, 1999